数理解析研究所講究録 1409 巻 2005 年 125-138

加重和限界貢献度の性質と投票力分析

大阪大学大学院基礎工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)
仲谷 篤 (Atsushi Nakatani)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.

1 はじめに

協力ゲームにおける解概念に，Shapley 値や Banzhaf 値がある．これらは，それぞれ各順列または各提携が等確率で成立するときの各プレイヤーの限界貢献度の期待値と考えられる．また，投票が行われる状況を協力ゲームとして定式化したものが投票ゲームであり，Shapley 値や Banzhaf 値を投票ゲームに適用した Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数がプレイヤーの発言力を分析する有効な投票力指数とみなされている．

しかし，実際には順列や提携が等確率で成立するとは限らない．このようなプレイヤーの非対称性を扱うための協力ゲームの解として，確率値やランダム順序値 [18]，重みつき Shapley 値や重みつき Banzhaf 値が提案されている．また，投票ゲームにおいては，各プレイヤーや議案のイデオロギーを選好空間に配置することにより，選好空間に基づいた非対称な指数が考えられており [9]，それに基づいて実際の日本の参議院における政党の投票力の分析を行った研究がある [7, 8]．近年松井・上原は，選考空間を導入せずに分析できる Shapley 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し，公理化と日本の参議院における政党の投票力の分析を行った [5]．また，遠藤ら [3] は，Banzhaf 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し, 1998 年と 1999 年のデータを導出し，参議院の投票力を測定した．

また，鶴見ら [12, 13] は，非対称な協力ゲームの値を定義するため，順列や提携を含む基準の概念を考え，各基準におけるプレイヤーの限界貢献度の概念を導入した．各基準が生じる確率，あるいは重みに，その基準におけるプレイヤーの限界貢献度を乗じたものの和を加重和限界貢献度として提案した．この値は，順列や提携などの限界貢献度の基準が確率分布にしたがって生じる場合には各プレイヤーの限界貢献度の期待値となる．また，加重和限界貢献度を全体合理性を満たすように基準化したものを新しい解として提案した．これらの値の公理系を証明し，他の解との関係を明らかにし，実際の日本の参議院における政党の影響力を評価した．

本研究では，加重和限界貢献度の投票ゲームにおける公理系を与え，加重和限界貢献度が単調分配案 (PMAS; Population Monotonic Allocation Scheme) [11] と呼ばれる解であることを示す．さらに，プレイヤーの非対称性をより詳細に取り扱い，日本の参議院における政党の投票力分析を行う．

2 提携形ゲームとその解

2.1 提携形ゲームとその主要な解

プレイヤー全体の集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ と表す．このとき，$v(\emptyset) = 0$ を満たす $v : 2^N \to \mathbb{R}$ は提携形ゲーム，協力ゲーム，あるいは単にゲームと呼ばれる．提携形ゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}$ と表す．

ゲーム $v \in \mathcal{G}$ おいて，任意の提携 $S \subseteq N$ に対して $v(S)$ が S が形成されたときに得られる利益と解釈されるとき，プレイヤー間の合理的利益配分が解として議論される．関数 $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ は，ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が与えられたときに，それに対応して合理的な利益配分を一意に与える関数と考えられることから，この関数を $\mathcal{G}$ 上の解とみなせる．その関数値 $f(v) = (f_i(v))_{i \in N}$ と関数値の各要素 $f_i(v)$ $(i \in N)$ は，それぞれプレイヤーへの合理的な利益配分を表すベクトルと，プレイヤー i が得られる合理的利益配分を表すため，これらを解と呼ぶこともある．

提携形ゲームにおける主要な解である Shapley 値と Banzhaf 値を導入するために，いくつかの概念を定義しておく．全単射 $\pi : N \to N$ を順列と呼び，順列の集合を $\Pi(N)$ で表す．各順列は N 上の全順序と同一視できる．この順列をプレイヤーが提携に参加する順序とみなすことで，順列における各プレイヤーの限界貢献度を定義する．任意の順列 $\pi \in \Pi(N)$ に対して $P(\pi, i) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ とするとき，ゲーム v におけるプレイヤー i の順列 $\pi \in \Pi(N)$ に関する限界貢献度は $m_i(v)(\pi) = v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))$ で定義される．順列に従って協力関係を成立させていくときに，プレイヤー i が新たに加わることでどれだけの利益の貢献があるのかを示している．また，提携における限界貢献度も考えられており，$C_i(v)(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S \backslash \{i\})$ がゲーム v におけるプレイヤー i の提携 $S \subseteq N$ に関する限界貢献度と呼ばれる．これは，プレイヤー i が提携 S に入っていないときには提携に加わることで得られる利益の増分を表しており，提携に既に入っている場合は提携から脱退したときと比較したときの利益の増分を表している．

このとき，ゲームの主要な解である Shapley 値は次のように定義される [10].

定義 1 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が与えられたとき，次を満たす $\phi_i(v)$ はプレイヤー $i \in N$ の Shapley 値と呼ばれる．

$$\phi_i(v) \;=\; \sum_{\pi \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} \cdot m_i(v)(\pi) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(s-1)! \cdot (n-s)!}{n!} \cdot C_i(v)(S)$$

定義から，Shapley 値は順列が等確率で生じるときの順列に基づくプレイヤーの限界貢献度の期待値であることがわかる．これに対して，提携に基づくプレイヤーの限界貢献度の期待値として，Banzhaf 値が提案されている [1].

定義 2 ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が与えられたとき，次を満たす $\beta_i(v)$ はプレイヤー $i \in N$ の Banzhaf 値と呼ばれる．

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^n} \sum_{S \subseteq N} C_i(v)(S) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, S \ni i} C_i(v)(S)$$

$v \in \mathcal{G}$ が与えられたときに，それに対応する Shapley 値，Banzhaf 値を与える関数 $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ と $\beta : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ は $\mathcal{G}$ 上の解である．この関数そのものも $\mathcal{G}$ 上の Shapley 値，Banzhaf 値と呼ぶ．Shapley 値や Banzhaf 値によって，提携に参加することでどれだけの利益が得られると期待できるかがわかる．

Shapley 値，Banzhaf 値そのものは，$v(N)$ の値をどのように配分するかを表すものであるが，各提携 $S \subseteq N$ に対してその値 $v(S)$ をどのように配分するかを表す概念として，単調分配案 (PMAS; Population Monotonic Allocation Scheme) [11] が定義されている．次を満たす $(\theta_i(v)[S])_{S \subseteq N}$ は単調分配案と呼ばれる．

$$\begin{cases} \theta_i(v)[S] \leq \theta_i(v)[T], & \forall S \subseteq T \subseteq N \\ \displaystyle\sum_{i \in S} \theta_i(v)[S] = v(S), & \forall S \subseteq N \end{cases}$$

Shapley 値から定義されるベクトル $(\phi_i(v)[S])_{S \subseteq N}$ は，PMAS であることが知られている．

また，Shapley 値は，次のような公理を満たす解であることが知られている．任意の置換 $\pi \in \Pi(N)$ と $S \subseteq N$ に対して，$\pi(S) = \{\pi(i) \mid i \in S\}$ とする．このとき，ゲーム $\pi v \in \mathcal{G}$ を任意の $S \subseteq N$ に対して $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ で定義する．このとき，次の公理が定義されている．

公理 1 （無名性，対称性）任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ において，任意の $i \in N$ と $\pi \in \Pi(N)$ に対して，$f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$ が成り立つ．

また，ゲームに関する線形性が次のように定義されている．

公理 2 （線形性）任意のゲーム $v, w \in \mathcal{G}$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$ が成り立つ．

任意の $S \subseteq N \backslash \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\})$ が成り立つとき，プレイヤー i は v においてダミープレイヤー (dummy) であると呼ばれる．ダミープレイヤーに関する性質として，次の性質が定義されている．

公理 3 （ダミー性）$i \in N$ がゲーム $v \in \mathcal{G}$ においてダミープレイヤーならば，$f_i(v) = v(\{i\})$ が成り立つ．

さらに，解のプレイヤーに関する和について，次の公理が成り立つことが知られている．

公理 4 （全体合理性，パレート最適性）任意の $v \in \mathcal{G}$ において次を満たすとき，f は全体合理的であると呼ばれる．

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$$

全体合理性は，提携 N として得られた値を過不足なく分け合うという意味で，合理的な性質である．Weber [18] は，これらの性質を基に次の公理系を証明している．

定理 1 公理 1–4 を満たす関数 $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ は一意に存在して，Shapley 値である．

定理から，公理 1–4 が合理的であるならば，Shapley 値を解として用いることが合理的であるといえる．公理系による特徴づけには，他にも Young[19] や Chun [2]，Hart と Mas-Colell [4]，van den Brink [16] によるものなどがある．また，Shapley 値については，公理系による特徴づけ以外にも特徴づけが与えられている．主な特徴づけは，[14] などに詳しい．

2.2 提携形ゲームにおける非対称解

Shapley 値を一般化した概念としては，確率値 (probablistic value) [18] があり，次のように定義される．

定義 3 $i \in N$ であり，次を満たす $2^{N\setminus\{i\}}$ 上の確率測度 p^i が存在するとき，$\psi_i : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ は $\mathcal{G}$ 上のプレイヤー i の確率値と呼ばれる．

$$\psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} p^i(S) C_i(v)(S)$$

$p^i(S)$ をプレイヤー i が提携 S に参加する確率とみなすと，プレイヤー i が確率測度 p^i に従って各提携に参加するときの貢献度の期待値であるとみなすことができる．また，定義から，v が与えられたとき，確率値は一意に定まらないことに注意する．確率測度 p^i を一つに定めるとそれに対応して確率値 ψ_i を一意に定めることができる．確率値の公理系を導入するために，次の公理を定義する．

公理 5 （単調性）ゲーム $v \in \mathcal{G}$ が単調，すなわち任意の $S \subseteq T$ に対して $v(S) \leq v(T)$ が成り立つとき，任意の $i \in N$ に対して $f_i(v) \geq 0$ が成り立つ．

確率値の公理系は，次のように得られる．

定理 2 公理 2, 3, 5 を満たす $f_i : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{G}$ 上の確率値である．

Shapley 値は，公理 5 を満たしていることに注意すると，定理 1 と定理 2 から，Shapley 値の公理を緩和することで確率値が得られることがわかり，Shapley 値は全体合理的かつ対称な唯一の確率値であると言える．任意の $S \subseteq N\setminus\{i\}$ に対して $p^i(S) = s!(n-s-1)!/n!$ で定義される確率測度に対する確率値は，Shapley 値である．また，Banzhaf 値は，任意の $S \subseteq N\setminus\{i\}$ に対して $p^i(S) = 1/2^{n-1}$ となる確率測度に対する確率値である．よって，確率値は，Shapley 値と Banzhaf 値両方を一般化した解である．

また，Shapley 値と Banzhaf 値が，各基準（Shapley 値なら順列，Banzhaf 値なら提携に対応するもの）が等確率で生じるときの限界貢献度の期待値であるということに着目し，鶴見らは基準が等確率で生じるとは限らない場合にも適用可能な限界貢献度の期待値となる新しい解を提案している [13]．この解を定義するための準備として，いくつかの概念を定義する．順列や提携のように，貢献度を測る基準となる概念を x と表し，そのすべてからなる集合を X と表す．このとき，各基準 x に対して，適切な提携を割り当てる関数 $h_i : X \to 2^N$ が一意に存在すると仮定する．このとき，$D_i(v)(x) = v(h_i(x) \cup \{i\}) - v(h_i(x)\setminus\{i\})$ をゲー

ム v において基準 x に対するプレイヤー i の限界貢献度と呼ぶ．この限界貢献度の概念を基に，次のように貢献度の期待値となる解が提案されている．

定義 4 $i \in N$ とする．基準の集合 X と，その X と任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して次を満たす $p: X \to \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ が存在するとき，p をプロファイルと呼び，$\eta_i: \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{G}$ 上のプレイヤー i の加重和限界貢献度と呼ぶ．

$$\eta_i(v) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot D_i(v)(x)$$

加重和限界貢献度は，確率値の部分クラスであり，Shapley 値，Banzhaf 値を一般化した概念である．鶴見らは，プロファイルが与えられたときの加重和限界貢献度の公理系による特徴づけも行っており，加重和限界貢献度の部分クラスとなる解である Shapley 型加重和限界貢献度，Banzhaf 型加重和限界貢献度も提案している．

加重和限界貢献度を全体合理性を満たすように線形変換した概念も次のように定義している．

定義 5 基準の集合 X と，$\sum_{j \in N} \eta_j(v) \neq 0$ と次を満たす $p: X \to \mathbb{R}$ が存在するとき，$\hat{\eta}(v) = (\hat{\eta}_i(v))_{i \in N}$ を v の限界型非対称解と呼ぶ．

$$\hat{\eta}_i(v) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \eta_j(v)} \cdot \eta_i(v), \forall i \in N$$

この解は，Shapley 値の一般化であり，Banzhaf 値を全体合理性を満たすように線形変換した正規化 Banzhaf 値の一般化でもある．Tsurumi et al. [12, 13] は，公理系を与えることによって，加重和限界貢献度の合理性を証明している．

3 投票ゲームと投票力指数

ゲームの部分クラスとして，投票ゲームがある．通常，投票ゲームは，任意の $S \subseteq N$ に対して $v(S) \in \{0, 1\}$ で，任意の $S \subseteq T \subseteq N$ に対して $v(S) \leq v(T)$ で，$v(N) = 1$ を満たすゲーム $v: 2^N \to \mathbb{R}$ と定義される．これは，議案や候補者を投票によって通すことができる提携に 1 を割り当て，そうでない提携に 0 を割り当てるゲームであると解釈できる．任意の投票ゲームは，次の 2 つの性質を満たす $\mathcal{W}$ で特徴づけることができる．

1. $N \in \mathcal{W}$, $\emptyset \notin \mathcal{W}$
2. $S \in \mathcal{W}$, $S \subseteq T \subseteq N$ ならば，$T \in \mathcal{W}$

$\mathcal{W} = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$ とすると，v と対応する $\mathcal{W}$ が得られる．すべての投票ゲーム $\mathcal{W}$ からなる集合を $\mathcal{VG}$ と表す．

投票ゲームにおける解は，投票力指数 (power index) と呼ばれ，プレイヤーの投票状況における発言力を測ることができることが知られている [6]．投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対する Shapley 値と Banzhaf 値は，それぞれ Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数と呼ばれ，次

のように表現できる．

$$\phi_i(\mathcal{W}) = \frac{1}{n!} \sum_{S \in \mathcal{W}, S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}} (s-1)!(n-s)!$$

$$\beta_i(\mathcal{W}) = \frac{|\{S \subseteq N \mid S \in \mathcal{W}, S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}\}|}{2^{n-1}}$$

Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数は，投票が行われる状況における投票者の発言力の分析に有効である [6].

公理 6 任意の $S \in \mathcal{W}$ に対して $i \notin S$ となるプレイヤーは，$\mathcal{W}$ におけるダミーと呼ばれる．任意の投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対して，i がそのダミーであるとき，$f_i(\mathcal{W}) = 0$ が成り立つ．

$i, j \in N$ について，彼らの番号を付け替えても勝利提携の集合の全体は変わらないとき，プレイヤー i, j は対称であると呼ばれる．

公理 7 対称なプレイヤー i, j に対して $f_i(\mathcal{W}) = f_j(\mathcal{W})$ が成り立つ．

投票ゲーム $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ に対して $\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2 = \{S \subseteq N \mid S \in \mathcal{W}_1 \text{ or } S \in \mathcal{W}_2\}$, $\mathcal{W}_1 \wedge \mathcal{W}_2 = \{S \subseteq N \mid S \in \mathcal{W}_1 \text{ and } S \in \mathcal{W}_2\}$ とする．このとき，次の公理が定義される．

公理 8 $\theta_i(\mathcal{W}_1; p) + \theta_i(\mathcal{W}_2; p) = \theta_i(\mathcal{W}_1 \vee \mathcal{W}_2; p) + \theta_i(\mathcal{W}_1 \wedge \mathcal{W}_2; p)$

公理 9 $\sum_{i \in N} f_i(\mathcal{W}) = 1$

公理 10

$$\sum_{i \in N} f_i(\mathcal{W}) = \frac{|\{i \in N \mid (S \in \mathcal{W} \text{ and } S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}) \text{ or } (S \notin \mathcal{W} \text{ and } S \cup \{i\} \in \mathcal{W})\}|}{2^n}$$

公理 6-9 を満たす唯一の投票力指数が Shapley-Shubik 指数であり，公理 6-8 と 10 を満たす唯一の投票力指数が Banzhaf 指数であることが知られている [6].

Shapley-Shubik 指数は，投票者の提携形成の順列が等確率で生じているという前提に基づき，Banzhaf 指数は，投票者の提携形成確率が等しいという前提に基づき影響力を導出している．しかしながら，提携形成の順列が生じる確率や提携形成確率が等しいとは限らない状況が多い．このような状況は，投票者間の非対称性が存在する状況と呼ばれる．投票者の非対称性を考慮して導出する投票力指数が考えられている．その多くは，投票者の非対称性を表すために選好空間を導入して，選好空間に基づいて投票力を分析するものである [9].

選好空間を必要とせずに非対称な状況を取り扱える投票力指数として，松井・上原 [5] は，Shapley-Shubik 指数に基づいた次のような投票力指数を提案した．ゲームとプロファイル $p: 2^N \to [0,1]$ が与えられたとき，MU 指数 ρ_i^{ϕ} は次のように定義される．

$$\rho_i^{\phi}(v; p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \phi_i(v)[S]$$

ただし，$\phi_i(v)[S]$ は，$S \subseteq N$ をプレイヤー全体集合として考えたときの Shapley 値を表す．また，遠藤ら [3] は，Banzhaf 指数に基づいて次のように定義される ESA 指数を提案した．

$$\rho_i^{\beta}(v;p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \beta_i(v)[S]$$

ただし，$\beta_i(v)[S]$ は，$S \subseteq N$ をプレイヤー全体集合として考えたときの Banzhaf 値を表す．

MU 指数と ESA 指数は，それぞれ，次のようなプロファイルが与えられたときには，通常の Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数を表す．

$$p(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

各基準 x に対して，適切な提携を割り当てる関数 $h_i : X \to 2^N$ が一意に存在すると考えられるとき，MU 指数と ESA 指数を拡張して，それぞれ

$$\rho_i^{\phi}(v;p) = \sum_{x \in X} p(h_i(x)) \cdot \phi_i(v)[h_i(x)]$$

$$\rho_i^{\beta}(v;p) = \sum_{x \in X} p(h_i(x)) \cdot \beta_i(v)[h_i(x)]$$

と定義することもできる．

4 加重和限界貢献度の性質

本研究では，加重和限界貢献度についての性質を明らかにする．まず，投票ゲームのクラス上の加重和限界貢献度を定義する．通常の提携形ゲームに対する加重和限界貢献度の概念を投票ゲームに適用することによって，次のような定義が得られる．

定義 6 次を満たす $p : X \to \mathbb{R}_+$ が存在するとき，$\eta_i : \mathcal{VG} \to \mathbb{R}$ を投票ゲーム上の加重和限界貢献度と呼ぶ．

$$\eta_i(\mathcal{W};p) = \sum_{x \in K_i(\mathcal{W})} p(x)$$

ただし，$K_i(\mathcal{W}) = \{x \in X \mid h_i(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}, h_i(x) \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}\}$ とする．

投票ゲーム上の加重和限界貢献度の公理系を考えるため，次の公理を定義する．まず，$\mathcal{W}^S = \{T \subseteq N \mid S \subseteq T\}$ とする．

公理 11

$$f_i(\mathcal{W}^S;p) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in J_i(S)} p(x) & \text{if } i \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし，

$$J_i(S) = \begin{cases} \{x \in X \mid h_i(x) \supseteq S\backslash\{i\}\} & i \in S \\ \emptyset & i \notin S \end{cases}$$

定理 3 加重和限界貢献度指数 $\eta_i : \mathcal{VG} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ は公理 8, 11 を満たし，公理 8, 11 を満たす $\theta_i : \mathcal{VG} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ は加重和限界貢献度指数である．

命題 1 ゲーム v が凸であるとき，$(\eta_i(v)[S])_{S \subseteq N}$ は，PMAS である．

5 加重和限界貢献度による投票力分析

一般に，対称な投票力指数を用いると，議席数のみから影響力を評価することになる．非対称な投票力指数を用いると，議席数だけでなく，各政党がどんな投票行動を取る傾向があるのかということを加味した分析ができる．これまでの非対称解を用いた日本の政党の投票力分析には，選好空間に基づいた小野・武藤の分析 [7, 8] や，MU 指数を用いた松井・上原の分析 [5]，MU 指数を用いた遠藤らの分析 [3]，加重和限界貢献度を使った分析 [12, 13] がある．

本研究では，非対称性を従来より詳細に取り扱った投票力分析を行う．実際に参議院の常会での投票行動のデータを元にして，対称解である Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数，正規化 Banzhaf 指数と，選好空間を必要としない非対称解である MU 値，ESA 値，正規化 ESA 値，加重和限界貢献度，限界型非対称解を適用して投票力指数を分析する．加重和限界貢献度および限界型非対称解を用いる際には，各議案を貢献度を求める基準 x とし，プロファイルの値 $p(x)$ を $p(x) = 1/(\text{総議案数})$ とする．従来の分析 [12, 13] においては，政党内のメンバーが欠席していてもそれを考慮せず，無所属議員や所属議員数の少ない政党は指数を算出する対象から外していた．しかし，実際には，欠席もしくは棄権する議員が存在する議案が多く，所属議員数の少ない政党であってもその投票行動によって議案の可決・否決に影響を与えることがある．本研究では各議案に対して賛成・反対の意見を出した実際の人数を政党の議席数とし，無所属議員は一人を一政党と考えて，投票力指数を全政党について算出した．

平成 10 年〜12 年の 3 年分の各政党の投票力指数を表 1〜4 に示す．平成 12 年においては 3 月 31 日〜4 月 7 日の間に一部の政党名と所属議員に変更があったため，3 月 31 日までと，4 月 7 日からとに分け，それぞれについて指数を測定している．

また，表では各政党を次のように略している．自民（平成 11 年）: 自由民主党，自民（平成 12 年 1 月から 3 月）: 自由民主党・自由国民会議，自民（平成 12 年 4 月から 6 月）: 自由民主党・保守党，民・新 : 民主党・新緑風会，公明（平成 11 年）: 公明党，公明（平成 12 年）: 公明党・改革クラブ，社・護 : 社会民主党・護憲連合，共産 : 日本共産党，自由 : 自由党，二院 : 二院クラブ，さき : 新党さきがけ，新・平 : 新社会党・平和連合，改革 : 改革クラブ，参院会 : 参議院の会，二・自 : 二院クラブ・自由連合，参院ク : 参議院クラブ

データから，自由民主党は議席数・投票力指数ともに圧倒的な力を有していることがわかる．民主党は多くの非対称解による影響力評価において対称解による影響力評価を下

表 1: 平成 10 年 常会 (総議案数：177)

		自民	民・新	公明	社・護	共産
議席数		118	41	24	21	14
対称	Shapley-Shubik 指数	0.7128	0.0417	0.0417	0.0417	0.0417
	Banzhaf 指数	0.9891	0.0109	0.0109	0.0109	0.0109
	正規化 Banzhaf 指数	0.9104	0.01	0.01	0.01	0.01
非対称	MU 指数	0.791	0.0254	0.0254	0.0575	0.0139
	ESA 指数	0.9446	0.0145	0.0138	0.0549	0.0049
	正規化 ESA 指数	0.8356	0.0128	0.0122	0.0486	0.0043
	加重和限界貢献度	0.6328	0	0	0.0282	0
	限界型非対称解	0.9573	0	0	0.0427	0

		自由	二院	さき	新・平	改革
議席数		11	4	3	3	3
対称	Shapley-Shubik 指数	0.0417	0.0173	0.0119	0.0119	0.0119
	Banzhaf 指数	0.0109	0.0089	0.0067	0.0067	0.0067
	正規化 Banzhaf 指数	0.01	0.0082	0.0062	0.0062	0.0062
非対称	MU 指数	0.0262	0.0122	0.0192	0.0051	0.0108
	ESA 指数	0.0152	0.0169	0.0285	0.0027	0.0088
	正規化 ESA 指数	0.0134	0.0149	0.0252	0.0024	0.0078
	加重和限界貢献度	0	0	0	0	0
	限界型非対称解	0	0	0	0	0

		無所属議員					
		石井	椎名	武田	松尾	片上	松崎
議席数		1	1	1	1	1	1
対称	Shapley-Shubik 指数	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
	Banzhaf 指数	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023	0.0023
	正規化 Banzhaf 指数	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021
非対称	MU 指数	0.0034	0.0019	0.0044	0.0035	0	0.0002
	ESA 指数	0.0025	0.0091	0.0114	0.0025	0	0.0003
	正規化 ESA 指数	0.0022	0.0081	0.01	0.0022	0	0.0003
	加重和限界貢献度	0	0	0	0	0	0
	限界型非対称解	0	0	0	0	0	0

表 2: 平成 11 年 常会 (総議案数 : 205)

		自民	民・新	公明	共産	社・護
議席数		104	56	24	23	14
対称	Shapley-Shubik 指数	0.5243	0.1136	0.0931	0.0874	0.0447
	Banzhaf 指数	0.8756	0.1245	0.1225	0.1209	0.0704
	正規化 Banzhaf 指数	0.6024	0.0857	0.0843	0.0832	0.0484
非対称	MU 指数	0.6093	0.0778	0.1536	0.0487	0.0297
	ESA 指数	0.7874	0.1023	0.1987	0.0572	0.0514
	正規化 ESA 指数	0.5907	0.0767	0.1491	0.0429	0.0385
	加重和限界貢献度	0.5756	0.0146	0.0732	0.0146	0.0146
	限界型非対称解	0.8311	0.0211	0.1056	0.0211	0.0211

					無所属議員		
		自由	参院会	二・自	菅野	中村	岩瀬
議席数		12	10	4	1	1	1
対称	Shapley-Shubik 指数	0.038	0.0338	0.014	0.0034	0.0034	0.0034
	Banzhaf 指数	0.0593	0.0546	0.0134	0.0041	0.0041	0.0041
	正規化 Banzhaf 指数	0.0408	0.0376	0.0092	0.0028	0.0028	0.0028
非対称	MU 指数	0.0428	0.0301	0.0045	0.0015	0.0013	0.0006
	ESA 指数	0.0725	0.0497	0.008	0.0025	0.0023	0.0011
	正規化 ESA 指数	0.0544	0.0373	0.006	0.0019	0.0017	0.0008
	加重和限界貢献度	0	0	0	0	0	0
	限界型非対称解	0	0	0	0	0	0

回る結果となった．その一方で，平成 10 年の社民党や，平成 11 年，12 年の公明党は所属議員が民主党より少ないにも関わらず，非対称解が民主党の値を上回る結果となっている．これは，連立による影響力増大や，影響力の強い政党と投票行動を共にする議案が多かったなどの要因が考えられる．平成 12 年の後半では二院クラブ・自由連合と無所属議員は対称解が全て 0 となっているが，それと比較すれば多くの非対称解での値は大きくなっている．

加重和限界貢献度・限界型非対称解は一つの党が多くの議席を有している場合や，連立政権が成り立っている状態では大半の政党で値が 0 となっている．これは，議案に対する影響力を他の指数よりも強く反映していると考えられる．

平成 12 年の 3 月までと 4 月以降を比較したとき，公明党の議席数には変化がないにもかかわらず，その影響力がいずれの投票力指数から見ても小さくなっていることがわかる．他の政党の議席数により，公明党の影響力が大きく影響を受けていることがわかる．

つぎに，非対称解による投票分析について，従来の投票分析 [12, 13, 15] と比較する．従来は各議案に対して欠席する議員の存在を考慮せず，全議案に対して政党の全員が同じ投票行動を取るものとし，主要 6 政党（自民，民主，公明，共産，社民，自由）のみの投

表 3: 平成 12 年（1 月 20 日～3 月 31 日）常会 (総議案数 : 67)

		自民	民・新	公明	共産	社・護
議席数		107	57	24	23	13
対称	Shapley-Shubik 指数	0.5715	0.1012	0.1012	0.1012	0.0388
	Banzhaf 指数	0.8865	0.1135	0.1135	0.1135	0.0667
	正規化 Banzhaf 指数	0.623	0.0798	0.0798	0.0798	0.0469
非対称	MU 指数	0.5958	0.0773	0.1803	0.0569	0.0283
	ESA 指数	0.7924	0.0985	0.2076	0.0666	0.0481
	正規化 ESA 指数	0.6018	0.0748	0.1577	0.0506	0.0365
	加重和限界貢献度	0.4478	0	0.1791	0	0
	限界型非対称解	0.7143	0	0.2857	0	0

					無所属議員	
		自由	参院会	二・自	菅野	中村
議席数		11	8	4	1	1
対称	Shapley-Shubik 指数	0.0339	0.0297	0.0049	0.002	0.002
	Banzhaf 指数	0.0584	0.0504	0.0121	0.0042	0.0042
	正規化 Banzhaf 指数	0.041	0.0354	0.0085	0.003	0.003
非対称	MU 指数	0.0251	0.0232	0.0088	0.0023	0.002
	ESA 指数	0.0423	0.039	0.0142	0.0044	0.0038
	正規化 ESA 指数	0.0321	0.0296	0.0108	0.0033	0.0029
	加重和限界貢献度	0	0	0	0	0
	限界型非対称解	0	0	0	0	0

票力指数を測定していた．今回の分析ですべての政党の投票力を測定してみると，平成 10 年参議院常会では測定対象から外されていた新党さきがけの各非対称解の値は共産党を上回っていることがわかった．また，[15] と本研究による投票力指数の結果を表 5，6 で表し，比較すると，明らかに影響力が異なっている．このことから，各議案に対して欠席する議員の存在を考慮するか否かによって分析が大きく異なることがわかった．

6 おわりに

本研究では，投票ゲームにおける加重和貢献度の公理系を導出し，加重和限界貢献度が PMAS になるということを示した．さらに，対称解である Shapley-Shubik 指数，Banzhaf 指数，正規化 Banzhaf 指数と非対称解である MU 指数，ESA 指数，正規化 ESA 指数，加重和限界貢献度，限界型非対称解を用いて，実際の参議院における政党の投票力を従来よりも詳細に分析した．

今後の課題としては，プロファイルの定め方の議論，新しい公理系の導出，より一般化されたゲームにおける加重和限界貢献度についての議論などが挙げられる．

表 4: 平成 12 年（4 月 7 日〜6 月 2 日）常会 (総議案数 : 89)

		自民	民・新	公明	共産	社・護
議席数		110	57	24	23	13
対称	Shapley-Shubik 指数	0.6667	0.0667	0.0667	0.0667	0.0667
	Banzhaf 指数	0.9375	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
	正規化 Banzhaf 指数	0.75	0.05	0.05	0.05	0.05
非対称	MU 指数	0.6537	0.0675	0.1252	0.0483	0.0416
	ESA 指数	0.8514	0.0812	0.1486	0.053	0.0526
	正規化 ESA 指数	0.6659	0.0635	0.1162	0.0415	0.0411
	加重和限界貢献度	0.4831	0	0.0674	0	0
	限界型非対称解	0.8776	0	0.1224	0	0

				無所属議員		
		参院ク	二・自	菅野	中村	魚住
議席数		13	4	1	1	1
対称	Shapley-Shubik 指数	0.0667	0	0	0	0
	Banzhaf 指数	0.0625	0	0	0	0
	正規化 Banzhaf 指数	0.05	0	0	0	0
非対称	MU 指数	0.0421	0.0131	0.0036	0.0036	0.0014
	ESA 指数	0.057	0.0215	0.0054	0.0055	0.0024
	正規化 ESA 指数	0.0446	0.0168	0.0042	0.0043	0.0019
	加重和限界貢献度	0	0	0	0	0
	限界型非対称解	0	0	0	0	0

参考文献

[1] J.F. Banzhaf, Weighted votind doesn't work: a mathematical analysis, Rutgers Law Review, 19 (1965) 317–343.

[2] Y. Chun: A new axiomatization of the Shapley value, *Games Econ. Beh.*, Vol.1, pp.119–130 (1989)

[3] 遠藤理世，鈴木貴，穴太克則，選考空間を構成せずに議案行動より直接計算する非対称 Banzhaf 指数，京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1207「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」研究集会報告集 (2001) 128–135.

[4] S. Hart, A. Mas-Colell: Potential, value and consistency, *Econometrica*, Vol. 57, pp.589–614 (1989)

[5] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[6] 武藤・小野: 投票システムのゲーム分析，日科技連 (1998)

表 5: 平成 10 年の測定指数の比較

		自民	民・新	公明	共産	社・護	自由
[15] での各指数							
非対称	MU 指数	0.739	0.042	0.046	0.001	0.131	0.042
	ESA 指数	0.85	0.054	0.06	0.001	0.146	0.055
	加重和限界貢献度	1	0.013	0	0	0.171	0
	限界型非対称解	0.845	0.011	0	0	0.144	0
本研究での各指数							
		自民	民・新	公明	共産	社・護	自由
非対称	MU 指数	0.791	0.0254	0.0254	0.0139	0.0575	0.0262
	ESA 指数	0.9446	0.0145	0.0138	0.0049	0.0549	0.0152
	加重和限界貢献度	0.6328	0	0	0	0.0282	0
	限界型非対称解	0.9573	0	0	0	0.0427	0

表 6: 平成 11 年の測定指数の比較

		自民	民・新	公明	共産	社・護	自由
[15] での各指数							
非対称	MU 指数	0.619	0.076	0.202	0.002	0.031	0.054
	ESA 指数	0.698	0.121	0.243	0.003	0.063	0.063
	加重和限界貢献度	0.985	0	0.161	0.007	0.036	0.036
	限界型非対称解	0.804	0	0.131	0.006	0.029	0.029
本研究での各指数							
		自民	民・新	公明	共産	社・護	自由
非対称	MU 指数	0.6093	0.0778	0.1536	0.0487	0.0297	0.0428
	ESA 指数	0.7874	0.1023	0.1987	0.0572	0.0514	0.0725
	加重和限界貢献度	0.5756	0.0146	0.0732	0.0146	0.0146	0
	限界型非対称解	0.8311	0.0211	0.1056	0.0211	0.0211	0

[7] 小野理恵「非対称 Shapley-Owen 指数を用いた参議院における政党の投票力分析 – 数量化 III 類を用いて–」,『理論と方法』, Vol. 11, pp.47–55 (1996)

[8] R. Ono and S. Muto, "Party power in the House of Councilors in Japan: an application of the nonsymmetric Shapley-Owen index", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 40, 21–32 (1997)

[9] G. Owen: Political games, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 22, pp.741–750 (1971)

[10] L.S. Shapley: A Value for n-person games, *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, pp. 307-317 (1953)

[11] Y. Sprumont, Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility, Games and Economic Behavior 2 (1990) 378-394.

[12] 鶴見昌代, 谷野哲三, 乾口雅弘, 貢献度に基づく協力ゲームの解とその応用, 京都大学数理解析研究所講究録 1241 「数理最適化の理論とアルゴリズム」研究集会報告集, pp.30–38 (2001).

[13] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi: Nonsymmetric values in cooperative games and their application, *Proc. 2nd Int. Conf. Nonlin. Anal. Convex Anal.*, pp. 507–516 (2003).

[14] 鶴見昌代, 谷野哲三, 提携形ゲームにおけるプレイヤーの貢献度に基づく解, システム制御情報学会誌, Vol.48, No.9, pp.361–368 (2004).

[15] 山形英顕, 協力ゲームにおける限界貢献度に基づく非対称解と投票力分析への応用, 大阪大学工学部電子情報エネルギー工学科特別研究報告 (2001)

[16] R. van den Brink: An axiomatization of the Shapley value using a fairness property, *Int. J. Game Theory*, Vol. 30, pp. 309-319 (2001)

[17] J. von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press (1944)

[18] R.J. Weber: Probabilistic values for games, in: *The Shapley Value*, A.E. Roth (ed.), Cambridge Univ. Press, pp. 101–119 (1988)

[19] H.P. Young: Monotonic solutions of cooperative games, *Int. J. Game Theory*, Vol. 14, pp. 65–72 (1985)